John Milnor rep el Premi Abel 2011

Nascut el 1931, John Milnor va rebre la Medalla Fields l'any 1962 pels seus treballs en topologia diferencial, però també ha fet contribucions essencials en topologia algebraica, teoria K, teoria de grups i sistemes dinàmics (de variable real i complexa). En els seus articles i *surveys*, la claredat d'exposició va sovint acompanyada d'idees molt profundes. Molts dels seus treballs han estat determinants per al desenvolupament posterior dels temes que ha tractat, i la seva influència es fa sentir en molts camps de les matemàtiques actuals. Intentaré donar una visió del treball de John Milnor.

Topologia diferencial

Els treballs de Milnor en topologia diferencial es consideren els més importants de la seva carrera i cal situar-los essencialment entre 1956 i 1965.

El primer resultat destacat va ser l'existència d'estructures exòtiques en esferes de dimensió 7. L'esfera *estàndard* de dimensió n, S^n, és l'esfera unitat de l'espai euclidià $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$

Milnor trobà les primeres varietats diferenciables que són homeomorfes a l'esfera estàndard S^7 però no difeomorfes, són el que s'anomenen *esferes exòtiques*. Milnor explica que quan les va trobar, ell fou el primer sorprès per la seva existència.

Dono breument la construcció que fa Milnor d'una esfera exòtica. Agafa dues còpies del producte de la bola de dimensió 4 per l'esfera de dimensió 3 $B^4 \times S^3$. Cada còpia té frontera un producte d'esferes $S^3 \times S^3$ i identifica les dues còpies mitjançant un difeomorfisme. Per a descriure el difeomeorfisme, fa servir que S^3 és l'esfera dels quaternions de Hamilton: envia el parell de quaternions unitaris $(q_1, q_2) \in S^3 \times S^3$ a $(q_1, q_1^2 q_2 q_1^{-1}) \in S^3 \times S^3$. Mitjançant l'estructura de grup fàcilment construïm l'invers d'aquest difeomorfisme, i obtenim una varietat diferenciable de dimensió 7. Per a que no és difeomorfa a S^7, Milnor fa servir classes característiques i demostra que la varietat no té cap difeomorfisme que inverteixi l'orientació. Per a veure que és homeomorfa a S^7, seguint una idea de Reeb, Milnor construeix una funció amb només dos punts crítics (un màxim i un mínim) que s'anomenen no degenerats (amb hessià diferent de zero), és a dir un tipus especial de funcions de Morse.

Observem que en aquesta demostració va utilitzar dues eines, classes característiques i funcions de Morse, que serien els temes respectiu de dos llibres que esdevindrien clàssics. Retrobarem les esferes exòtiques quan parlem de singularitats.

El descobriment d'estructures exòtiques va ser l'inici d'un període molt intens de la topologia diferencial. Aquest resultat justificava que les estructures diferencials fossin un objecte important per a ser estudiat, i Milnor s'hi va posar, en col·laboració sobretot amb M. Kervaire. Durant els anys següents hi hagué una extraordinària interaccció entre matemàtics que treballaven en diversos camps de la topologia. Les tècniques que es van desenvolupar s'apliquen a varietats de dimensió 5 o superior. Així, Kervaire i Milnor van poder calcular quantes estructures diferencials hi ha per les esferes de dimensió ≥ 5, és a dir quantes varietats (orientades) homeomorfes però no difeomorfes hi ha a S^n. En dimensions 5 i 6 n'hi ha només una, però en dimensió 7 n'hi ha 28, en dimensió 8 n'hi ha 2... De fet, en cada dimensió $n > 4$ aquestes estructures formen un grup, que en molts casos es pot calcular a partir dels grups d'homotopia estable de les esferes. Ja veiem que tot això té molta relació amb la topologia algebraica.

En dimensió 4 o inferior tota aquesta teoria no s'aplica. En dimensions 2 i 3 se sap que tota varietat admet una única estructura diferenciable, però en dimensió 4 no. De fet, la conjectura de Poincaré topològica fou resolta per Freedman el 1982: tota varietat homotòpicament equivalent a S^4 és homeomorfa a S^4, però encara queda pendent la versió diferenciable: hi ha alguna varietat homeomorfa però no difeomorfa a S^4? Equivalentment: *Existeixen esferes exòtiques de*

dimensió quatre? El 1983 Donaldson caracteritzà quines varietats de dimensió 4 simplement connexes admeten una estructura diferenciable, però no demostrà que fossin úniques.

L'explosió de la topologia diferencial portà al desenvolupament de la teoria de cirurgia, els cobordismes (s-cobordisme, h-cobordisme), les funcions de Morse i la teoria de nanses. Aquesta darrera permeté a Smale, Stallings i Zeeman demostrar la conjectura de Poincaré en gran dimensió.

Una altra contribució importantíssima de Milnor fou establir quines esferes són *paral·lelitzables*, és a dir tenen fibrat tangent trivial. Les esferes de dimensió 1, 3 i 7 són paral·lelitzables, perquè són l'esfera unitat, respectivament, dels nombres complexos, dels quaternions i dels octonions de Cayley. Això dóna una manera de trivialitzar-ne el fibrat tangent, mitjançant la multiplicació. Raoul Bott i John Milnor, i de manera independent Michel Kervaire, van demostrar el 1958 que aquestes són les úniques esferes paral·lelitzables. De fet l'article de Bott i Milnor al *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* és un extracte de dues cartes que es van intercanviar: «Milnor to Bott, December 23, 1957» i «Bott to Milnor, January 6, 1958». Sembla que durant aquelles vacances de Nadal les classes de Pontryagin treien fum! Cal mencionar que aquest resultat va ser subsumit pel treball d'Adams el 1962, que determina el nombre màxim de camps vectorials en una esfera que són linealment independents en cada punt.

El 1908 Steinitz i Tietze havien formulat l'anomenada *Hauptvermutung*, segons la qual dos complexos simplicials homeomorfs havien de ser combinatòriament equivalents (sempre llevat de subdivisió). Milnor trobà un contraexemple el 1961, utilitzant l'anomenada torsió de Reidemeister. Cal dir que el contraexemple no és una varietat i va caldre esperar fins al final de la dècada perquè Edwards, Casson, Kirby i Siebenmann en trobessin un que fos una varietat. A partir d'aquí Milnor va seguir estudiant aquesta torsió i va descobrir que el polinomi d'Alexander també és una torsió de Reidemeister. Això permeté (a ell i a altres autors) donar arguments molt senzills per a resultats que involucren el polinomi d'Alexander. Sobre la torsió, cal destacar el *survey* «Whitehead torsion», en el qual dóna una aproximació unificada de les dues torsions, la de Whitehead introduïda el 1950 i la de Reidemeister, de 1935, així com la relació amb els cobordismes, l'homotopia simple i la teoria K algebraica.

Topologia algebraica

Els treballs de Milnor en topologia diferencial utilitzen moltes eines de topologia algebraica, com ara les classes característiques que ja hem mencionat. El 1957 Milnor va oferir un curs de classes característiques, publicat el 1974 conjuntament amb James Stasheff, que n'havia pres notes. Tot i esperar disset anys a ser publicat, va ser un llibre molt influent, i de fet continua sent molt citat actualment (per exemple, el 2010 té trenta-nou cites al Mathscinet). He seleccionat quatre contribucions especialment rellevants en topologia algebraica.

1. Els espais classificants són molt importants per al desenvolupament de la teoria d'homotopia, incloent la classificació de fibrats, i de l'àlgebra homològica. Els primers espais classificants s'havien construït mitjançant grassmanianes, va ser Milnor qui en donà una construcció per a un grup topològic en general amb tècniques diferents.
2. A la dècada dels anys cinquanta es desenvolupaven mètodes simplicials en topologia, i Milnor va donar una construcció que permetia associar un CW-complex a un complex semi-simplicial. Milnor va contribuir a impulsar la idea que en topologia algebraica els CW-complexos són els espais més adients per a treballar.
3. El 1953 Steenrod havia introduït unes operacions en cohomologia, que afegien una nova estructura a la cohomologia d'un espai a coeficients $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Autors com José Adem o Henri Cartan n'estudiaren les propietats. Milnor va demostrar que les àlgebres de Steenrood en cohomologia també són àlgebres de Hopf (és a dir, a més d'un producte tenen un coproducte amb certa compatibilitat i estructura), la qual cosa oferia una visió més general dels resultats d'Adem i Cartan. El treball de Milnor va tenir un paper molt influent en el desenvolupament de la successió espectral d'Adams, clau en l'estudi de l'homotopia estable i el cobordisme (que ens tornen a la part de topologia diferencial).
4. Un altre treball molt significatiu és la caracterització del tipus d'homotopia de les varietats

de dimensió 4 simplement connexes. Per a una varietat tancada i orientada, la forma d'intersecció del segon grup d'homologia

$$H_2(M^4) \times H_2(M^4) \to \mathbf{Z}$$

és una forma bilineal, simètrica i no degenerada. Basat en treballs de Whitehead, Milnor demostrà que aquest invariant classifica el tipus d'homotopia de les varietats de dimensió 4 simplement connexes. A la part d'àlgebra tornarem a trobar una connexió amb el tema de les formes quadràtiques.

Àlgebra

Milnor té treballs molt significatius en teoria K algebraica i formes quadràtiques. Els desenvolupaments de topologia algebraica i diferencial en els quals Milnor participava involucraven el K_0 i el K_1 algebraics. Cap al 1960, es coneixia una definició pel K_0 i K_1 d'un anell, però no els grups superiors de teoria K. Milnor va trobar la definició adequada pel K_2 d'un cos i va proposar definicions per a tots els grups superiors. Quillen fou qui va trobar posteriorment la definició correcta per a tots els grups de teoria K. Com a part d'aquest treball, Milnor formulà una conjectura, la resolució de la qual li va valdre a Vladimir Voevodsky rebre la Medalla Fields el 2002.

Relacionat amb el desenvolupament de la teoria K, Milnor féu contribucions importants en el càlcul de grups de Whitehead, i en el problema del subgrup de congruència, és a dir, de decidir si tot subgrup d'índex finit d'un grup aritmètic conté un subgrup de congruència. Per exemple, si A és l'anell d'enters d'un cos de nombres, aleshores $SL_n(A)$ és un grup aritmètic i un grup de congruència és el nucli d'una projecció

$$SL_n(A) \to SL_n(A/I),$$

sent I un ideal de A. Aquí cal mencionar també nombroses contribucions en el tema clàssic de formes quadràtiques, en particular la resolució completa de la teoria dels productes simètrics sobre un cos de característica 2.

A més de la teoria K, Milnor va fer contribucions a les àlgebres de Hopf i a la funció de creixement de grups. Expliquem els seus treballs sobre la funció de creixement, que són anteriors als treballs de Cannon i Gromov de la dècada dels vuitanta, considerats fundacionals per a la teoria geomètrica de grups. L'any 1968 Milnor va introduir la funció de creixement d'un grup G finitament generat respecte a un sistema de generadors. Per a tot $n \in \mathbf{N}$, $c(n)$ es defineix com el nombre d'elements de G que es poden expressar en una paraula de longitud $\leq n$ respecte al sistema de generadors. Diem que G té creixement de tipus:

- polinòmic de grau d, si $c(n) \leq an^d$ per a cert $a > 0$,
- exponencial, si $c(n) \geq b^n$, per a cert $b > 1$.

El tipus de comportament de $c(n)$ no depén del conjunt de generadors, només del grup G. Milnor n'estudià el comportament pel grup fonamental de varietats amb restriccions en la curvatura, en un article de 1968. El mateix any, en una nota demostra que si G és un grup resoluble, aleshores o bé G té creixement exponencial, o bé G és virtualment nilpotent (i en particular G té creixement polinòmic). Això el porta a preguntar:

1. El creixement d'un grup finitament generat ha de ser necessàriament polinòmic o exponencial?
2. Conjectura: tot grup finitament generat de creixement polinòmic es virtualment nilpotent.

La resposta a la primera pregunta és *no*, amb un contraexemple trobat per Grigorchuk el 1983. La demostració de la conjectura 2 la va donar Gromov el 1981.

Singularitats

En l'apartat de topologia diferencial he parlat de les esferes exòtiques, construïdes per Milnor el 1956. El 1966 Brieskorn va donar una construcció de les 28 estructures exòtiques de S^7, com la intersecció d'una hipersuperfície de $\mathbf{C}^5$ amb una esfera petita centrada en l'origen:

$$\{z \in \mathbf{C}^5 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\} \cup \\ \cup \{z \in \mathbf{C}^5 \mid |z| = \varepsilon\},$$

per a $\varepsilon > 0$ prou petit. De fet per a $k = 1, 2, \ldots, 28$ obtenim les 28 estructures diferenciables possibles de S^7.

Segons B. Teissier, «Milnor certament va donar a la teoria analítica de singularitats molt més del que en rebé; a canvi d'una descripció concreta d'esferes exòtiques, John Milnor va oferir als geòmetres de singularitats les eines per a

entendre el comportament geomètric d'una funció analítica (de diverses variables complexes) en un entorn d'un punt crític».

Els treballs de Milnor van portar al desenvolupament de l'estudi local topològic de les singularitats en geometria analítica mitjançant mètodes de geometria diferencial, per oposició a l'estudi global mitjançant geometria algebraica o cohomologia que havia dominat fins aleshores. Les nocions de *fibra de Milnor* i *nombre de Milnor* són actualment unes de les nocions més importants en l'estudi de singularitats complexes.

Sitemes dinàmics

En els darrers anys, Milnor ha tingut un rol prominent en el desenvolupament dels sistemes dinàmics de baixa dimensió, tant de variable real com complexa. El seu treball capdavanter amb Thurston establí els fonaments combinatoris per a la dinàmica de l'interval, mitjançant la *kneading theory*. Em referixo a un article de Milnor i Thurston que fou publicat el 1988, però que ja circulava des del 1977, en què desenvolupen una teoria que ha estat en el focus d'una intensa recerca durant dècades. La conjectura de Milnor i Thurston sobre la monotonicitat de l'entropia ha unit la dinàmica real i l'holomorfa d'una manera profunda, portant a avenços substancials. A més, el seu llibre *Dynamics in One Complex Variable*, de 1999, ràpidament esdevingué la porta d'entrada més popular en aquest camp.

Geometria diferencial

El primer article de Milnor, publicat quan tenia dinou anys, és de geometria diferencial i parla de la curvatura total d'una corba a l'espai. Segons la llegenda, Milnor provà el teorema accidentalment, perquè es va pensar que en comptes d'una conjectura era un problema que formava part «dels deures assignats». Cal dir que una demostració independent havia estat donada per I. Fáry poc temps abans.

Considerem una corba llisa parametritzada a l'espai $C\colon [0,L] \to \mathbf{R}^3$. Suposarem que la corba és tancada, amb $C(0) = C(L)$, i que totes les derivades coincideixen $C^{(n)}(0) = C^{(n)}(L)$. Així també la podem pensar com una aplicació llisa del cercle $S^1 \to \mathbf{R}^3$. També suposarem que es mou a velocitat 1, és a dir que el seu vector tangent és unitari: $|C'(t)| = 1$. La curvatura es defineix com la norma de la segona derivada:

$$\kappa(t) = |C''(t)|.$$

Definim la curvatura total com:

$$\kappa(C) = \int_0^L \kappa(t)dt = \int_0^L |C''(t)|dt\,.$$

El teorema de Fáry-Milnor diu que si la corba fa un nus, aleshores

$$\kappa(C) > 4\pi.$$

Que la corba faci un nus vol dir que no es pot deformar per una família contínua d'aplicacions injectives $S^1 \to \mathbf{R}^3$ en el cercle pla. Observem que pel cercle pla, la curvatura total és 2π.

Un altre resultat remarcable de Milnor consisteix a trobar una obstrucció perquè un fibrat en plans sobre una superfície tingui una connexió plana. L'obstrucció té a veure evidentment amb classes característiques: si el fibrat té una connexió plana, aleshores el mòdul de la classe d'Euler ha de ser (estrictament) menor que el gènere de la superfície. Aquest treball va ser reprès per John Wood pels fibrats en cercles, i actualment aquest tipus de desigualtats reben el nom de desigualtats de Milnor-Wood.

També cal destacar una nota de menys d'una pàgina als *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, on dóna dos exemples de varietats de Riemann amb el mateix espectre del Laplacià que no són isomètriques, a partir d'un exemple de dos subgrups discrets de $\mathbf{R}^{16}$ de Witt. Això està relacionat amb els coneixements que té Milnor dels treballs de Witt, sobretot per les formes quadràtiques, que han aparegut en els treballs d'àlgebra. Posteriorment s'han obtingut molts resultats de varietats isospectrals.

Milnor també té *surveys* excel·lents de geometria diferencial, com per exemple un sobre mètriques invariants en grups de Lie, un altre sobre els «150 primers anys de la geometria hiperbòlica» i el llibre de teoria de Morse.

Conclusions

Encara que no ho sembli, m'he deixat molts treballs de Milnor per citar. Cobrir-ho tot és molt difícil. La conclusió que en trec és que Milnor ha tingut una visió unificada de les matemàtiques, ha fet contribucions molt rellevants en temes diferents i ha establert molts ponts entre camps

allunyats, com ara l'aplicació d'algunes idees de geometia riemanniana a la teoria de grups, la interacció entre topologia diferencial i algebraica, o entre topologia i àlgebra. Finalment, vull mencionar que la majoria de treballs de Milnor han resistit molt bé el pas del temps, i que actualment encara es pot gaudir i aprendre llegint-los.

Joan Porti
UAB

Societat Catalana de Matemàtiques

Convocatòries de 2012

La Societat Catalana de Matemàtiques ha convocat enguany una edició més, dins el cartell de premis de l'IEC, del premi

Premi Évariste Galois

Instituït l'any 1962 i convocat per quaranta-novena vegada, s'ofereix a un treball d'investigació, bibliogràfic o d'assaig sobre matemàtiques. Està dotat amb mil euros (1.000 €).
Termini per a la presentació de candidatures: 2 de desembre de 2011 a les 13 h.

Més informació: http://scm.iec.cat

Guardonats en la convocatòria de 2011

• El Premi Évariste Galois ha estat atorgat a Joaquim Serra i Montolí pel treball «Dos problemes de simetria en equacions de reacció-difusió».

Aquest premi fou lliurat el passat 28 d'abril en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudis de l'Institut d'Estudis Catalans.

Ressenyes d'obres guardonades

• Joaquim Serra i Montolí, «Dos problemes de simetria en equacions de reacció-difusió». Premi Évariste Galois 2011

Les equacions de reacció-difusió estacionàries, també anomenades equacions el·líptiques semilineals, apareixen en moltes àrees de les matemàtiques i la física, com per exemple en fenòmens físics de transició de fase en ciències dels materials, en dinàmica de poblacions o en l'estudi de les superfícies minimals en geometria diferencial. En aquesta línia de recerca hi ha hagut molta activitat en la comprensió de difusions fraccionàries que modelen processos estocàstics de Lévy estables, en lloc de moviments brownians. Aquest camp de recerca ha atret molts matemàtics reconeguts com Caffarelli, Nirenberg, Berestycki o Brezis, entre altres, i continua molt actiu en l'àmbit internacional. Una de les propietats més rellevants de les solucions d'aquestes equacions és que tenen una certa simetria. Particularment, la coneguda com a *conjectura de De Giorgi* sobre simetria $1-D$ de les solucions d'un model de transició de fases va ser estudiada per aquesta comunitat durant molt de temps.